

Università degli Studi di Padova

Corso di laurea triennale in Ingegneria informatica

Appunti delle lezioni

Analisi Matematica 1

Codice insegnamento

IN10100190

Canale

B

Docente

Prof. Alessandro Languasco

Anno accademico

2026–2027

Anno di corso

1

Semestre

1

Autore

Simone Siega

Data

29 settembre 2026

Versione

0.1.0

Materiale didattico non ufficiale, non approvato né pubblicato dall'Università degli Studi di Padova.

Opera distribuita con licenza CC BY-SA 4.0.

Indice dei contenuti

Convenzioni e notazione	1
1 Lezione 1 — 29 settembre 2026	2
1.1 Numeri naturali e le loro operazioni	2
1.2 Ordinamento totale dei numeri naturali	3
1.3 Richiami su insiemi e dimostrazioni	4
1.4 Principio di induzione	4
2 Lezione 2 — 30 settembre 2026	8
2.1 Numeri interi	8
2.2 Numeri razionali	9
2.3 Irrazionalità della radice quadrata di 2	9
2.4 Fattoriale	12
3 Lezione 3 — 1 ottobre 2026	14
3.1 Coefficienti binomiali	14
3.2 Numeri reali	16
3.3 Proprietà archimedeo	16
3.4 Parte intera, floor e ceiling	18
3.5 Cenno sulla radice quadrata di 2 nei reali	19
4 Lezione 4 — 2 ottobre 2026	21
4.1 Densità dei numeri razionali	21
4.2 Intervalli della retta reale	22
4.3 Maggioranti, minoranti e insiemi limitati	23
4.3.1 Esempi fondamentali	24
4.4 Massimo e minimo	24
4.5 Estremo superiore ed estremo inferiore	25
4.6 Caratterizzazione di estremo superiore e inferiore	26
5 Lezione 5 — 6 ottobre 2026	31
5.1 Disuguaglianza di Bernoulli	31
5.2 Binomio di Newton	31
5.3 Esercizi sul fattoriale	32
5.4 Esercizi sugli estremi	33
A Tutorato 1 — 8 ottobre 2026	36

Convenzioni e notazione

$\mathbb{N}$	Insieme dei numeri naturali, con $0 \in \mathbb{N}$
$\mathbb{Z}$	Insieme dei numeri interi
$\mathbb{Q}$	Insieme dei numeri razionali
$\mathbb{R}$	Insieme dei numeri reali
$\exists!$	Esiste ed è unico
$\subseteq$	Inclusione tra insiemi, con uguaglianza ammessa
$\lfloor x \rfloor$	Parte intera inferiore di x , ossia il massimo intero minore o uguale a x
$\lceil x \rceil$	Parte intera superiore di x , ossia il minimo intero maggiore o uguale a x

1 Lezione 1: numeri naturali, ordinamento e principio di induzione

1.1 Numeri naturali e le loro operazioni

Si considera l'insieme dei numeri naturali

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\},$$

adottando la convenzione $0 \in \mathbb{N}$.

Su $\mathbb{N}$ sono definite le operazioni di somma e prodotto. Entrambe sono operazioni binarie, ossia applicazioni che a ogni coppia ordinata $(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ associano un elemento di $\mathbb{N}$:

$$+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad (a, b) \mapsto a + b,$$

$$\cdot : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \quad (a, b) \mapsto ab.$$

L'insieme $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ costituisce pertanto l'insieme di partenza, mentre $\mathbb{N}$ è l'insieme di arrivo delle due operazioni.

Le proprietà fondamentali della somma e del prodotto introdotte di seguito vengono assunte come *assiomi* e costituiscono il punto di partenza per i successivi sviluppi, senza essere dimostrate.

Per ogni $a, b, c \in \mathbb{N}$, la somma è commutativa, ossia l'ordine degli addendi non modifica il risultato, e associativa, ossia il modo in cui gli addendi vengono raggruppati non modifica la somma:

$$a + b = b + a, \quad (a + b) + c = a + (b + c).$$

La somma ammette un unico elemento neutro e_0 , caratterizzato dalla proprietà

$$\exists! e_0 \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall a \in \mathbb{N}, \quad a + e_0 = a.$$

Tale elemento è

$$e_0 = 0.$$

Per ogni $a, b, c \in \mathbb{N}$, il prodotto è commutativo, ossia l'ordine dei fattori non modifica il risultato, e associativo, ossia il modo in cui i fattori vengono raggruppati non modifica il prodotto:

$$ab = ba, \quad (ab)c = a(bc).$$

Il prodotto ammette un unico elemento neutro e_1 , caratterizzato dalla proprietà

$$\exists! e_1 \in \mathbb{N} \quad \text{tale che} \quad \forall a \in \mathbb{N}, \quad ae_1 = a.$$

Tale elemento è

$$e_1 = 1.$$

Infine, il prodotto è distributivo rispetto alla somma: per ogni $a, b, c \in \mathbb{N}$ vale

$$a(b + c) = ab + ac.$$

Per la commutatività del prodotto, equivalentemente,

$$(a + b)c = ac + bc.$$

1.2 Ordinamento totale dei numeri naturali

Per $a, b \in \mathbb{N}$, si definisce la relazione $\leq$ nel modo seguente.

Definizione 1.1 (Ordine naturale).

$$a \leq b \iff \exists c \in \mathbb{N} : a + c = b.$$

La relazione $a \leq b$ esprime quindi il fatto che è possibile ottenere b aggiungendo ad a un opportuno numero naturale. Tale relazione soddisfa quattro proprietà fondamentali.

Riflessività. Ogni numero naturale è minore o uguale a sé stesso; per ogni $a \in \mathbb{N}$ vale

$$a \leq a.$$

Infatti, nella [definizione 1.1](#) è sufficiente scegliere $c = 0$, poiché

$$a + 0 = a.$$

Antisimmetria. Se due numeri naturali sono ciascuno minore o uguale dell'altro, allora coincidono. Per ogni $a, b \in \mathbb{N}$,

$$a \leq b \text{ e } b \leq a \implies a = b.$$

Transitività. Se un numero naturale è minore o uguale a un secondo numero e quest'ultimo è minore o uguale a un terzo, allora il primo è minore o uguale al terzo. Per ogni $a, b, c \in \mathbb{N}$,

$$a \leq b \text{ e } b \leq c \implies a \leq c.$$

Dicotomia. Ogni coppia di numeri naturali è confrontabile: per ogni $a, b \in \mathbb{N}$ vale

$$a \leq b \text{ oppure } b \leq a.$$

Le due possibilità non sono necessariamente esclusive: quando $a = b$, entrambe le relazioni risultano vere.

Le proprietà precedenti caratterizzano la relazione $\leq$ come un ordinamento totale su $\mathbb{N}$.

La relazione d'ordine è inoltre compatibile con le operazioni di somma e prodotto.

Proposizione 1.1 (Compatibilità dell'ordine). Per ogni $a, b, c \in \mathbb{N}$, se $a \leq b$, allora

$$a + c \leq b + c.$$

Inoltre, se $c > 0$, vale

$$ac \leq bc.$$

La prima proprietà afferma che l'aggiunta dello stesso numero naturale ai due membri preserva la relazione d'ordine; la seconda esprime l'analoga compatibilità rispetto alla moltiplicazione per un numero naturale strettamente positivo.

Se $c = 0$, si ha $ac = bc = 0$, per cui la disuguaglianza non stretta rimane comunque valida.

La dimostrazione della [proposizione 1.1](#) non viene sviluppata in questa sede.

1.3 Richiami su insiemi e dimostrazioni

Siano A e B due insiemi. Tra le operazioni fondamentali sugli insiemi si considerano l'intersezione, che raccoglie gli elementi comuni, e l'unione, che raccoglie gli elementi appartenenti ad almeno uno dei due:

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ e } x \in B\}, \quad A \cup B = \{x : x \in A \text{ oppure } x \in B\}.$$

La figura 1.1 rappresenta le regioni corrispondenti:



Figura 1.1. Intersezione (a sinistra) e unione (a destra) di due insiemi.

Accanto alla notazione insiemistica, è necessario fissare il linguaggio impiegato negli enunciati matematici e nelle relative dimostrazioni.

Un teorema ha la forma

$$\text{IPOTESI} \implies \text{TESI}.$$

Una dimostrazione deduce la tesi dalle ipotesi mediante passaggi logicamente validi. Per proposizioni A e B , l'implicazione $A \implies B$ asserisce che, se A è vera, allora è vera anche B . Nella logica classica essa è equivalente alla propria contronominale:

$$A \implies B \iff \neg B \implies \neg A.$$

La dimostrazione per assurdo è distinta: mantenendo valide le ipotesi, si assume la negazione della tesi e da tali assunzioni si ricava una contraddizione, ossia una proposizione C e, contemporaneamente, la sua negazione $\neg C$.

1.4 Principio di induzione

Il principio di induzione consente di dimostrare che una determinata proprietà vale per tutti i numeri naturali a partire da un valore iniziale p . Si verifica anzitutto la proprietà per p e si dimostra che la sua validità per un generico naturale n implica la validità per il successivo $n + 1$. Ne segue così la propagazione della proprietà da p a $p + 1$, quindi a $p + 2$, e così via.

Teorema 1.1 (Principio di induzione). Siano $A \subseteq \mathbb{N}$ e $p \in \mathbb{N}$. Se

$$p \in A \quad \text{e} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad n \in A \implies n + 1 \in A,$$

allora

$$\{n \in \mathbb{N} : n \geq p\} \subseteq A.$$

La prima condizione è

$$p \in A.$$

Essa costituisce il *passo base* e fissa il punto iniziale dell'induzione. La seconda condizione è

$$n \in A \implies n + 1 \in A.$$

Essa costituisce il *passo induttivo* e permette di estendere l'appartenenza ad A da un naturale al suo successivo.

Se $P(n)$ è una proprietà dipendente da n e si intende dimostrarne la validità per ogni $n \geq p$, si può porre

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \geq p \text{ e } P(n) \text{ è vera}\}.$$

Dimostrare che $P(n)$ vale per ogni $n \geq p$ equivale allora a verificare

$$P(p)$$

e a dimostrare, per un generico $n \geq p$,

$$P(n) \implies P(n + 1).$$

Si considerano ora due applicazioni del [teorema 1.1](#): nell'[esempio 1.1](#) si dimostra la formula per la somma dei primi n naturali positivi, mentre nell'[esempio 1.2](#) si considera la somma geometrica finita. Nel secondo esempio compare l'insieme $\mathbb{R}$ dei numeri reali, che sarà introdotto nella [sezione 3.2](#).

Esempio 1.1 (Somma dei primi n naturali positivi). Per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ vale

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

La formula fornisce quindi un'espressione chiusa per la somma

$$1 + 2 + \dots + n$$

dei primi n numeri naturali positivi.

Dimostrazione. Per applicare il [teorema 1.1](#) si considera l'insieme dei naturali per i quali la proprietà risulta vera:

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} : n \geq 1, \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2} \right\}.$$

L'obiettivo è mostrare che ogni numero naturale maggiore o uguale a 1 appartiene ad A .

Passo base. Si verifica anzitutto la proprietà per $n = 1$. Si ha

$$\sum_{i=1}^1 i = 1 \quad \text{e} \quad \frac{1(1+1)}{2} = 1.$$

I due membri coincidono; pertanto $1 \in A$ e il passo base è verificato.

Passo induttivo. Sia $n \in A$. Per definizione di A , si ha $n \geq 1$ e vale l'ipotesi induttiva

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Si deve dimostrare che anche il naturale successivo appartiene ad A , ossia che $n + 1 \in A$. Poiché $n + 1 \geq 1$, la tesi induttiva consiste nel verificare

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Separando dalla sommatoria l'ultimo addendo e applicando l'ipotesi induttiva, si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} i &= \sum_{i=1}^n i + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2}. \end{aligned}$$

L'ultima espressione coincide con quella richiesta dalla tesi induttiva; pertanto $n + 1 \in A$. Risulta quindi verificata l'implicazione

$$n \in A \implies n + 1 \in A.$$

Essendo verificati sia il passo base sia il passo induttivo, per il [teorema 1.1](#), con valore iniziale $p = 1$, si conclude che

$$\{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\} \subseteq A.$$

Di conseguenza,

$$\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$. □

Esempio 1.2 (Somma geometrica finita). Sia $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Con la convenzione $q^0 = 1$, il membro sinistro rappresenta la somma

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n.$$

La formula fornisce quindi un'espressione chiusa per la somma dei primi $n + 1$ termini della progressione geometrica di ragione q .

In particolare, per $q = 0$ tutti i termini con esponente positivo sono nulli e si ha

$$\sum_{k=0}^n 0^k = 1 + 0 + \cdots + 0 = 1.$$

D'altra parte,

$$\frac{1 - 0^{n+1}}{1 - 0} = 1.$$

Il caso $q = 0$ soddisfa quindi la formula. Il valore $q = 1$ è escluso dalla formula precedente perché annulla il denominatore; in tal caso, direttamente,

$$\sum_{k=0}^n 1^k = n + 1.$$

Dimostrazione. Fissato $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, si considera l'insieme dei naturali per i quali la proprietà risulta vera:

$$A = \left\{ n \in \mathbb{N} : \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right\}.$$

L'obiettivo è mostrare che ogni numero naturale appartiene ad A , ossia che $A = \mathbb{N}$.

Passo base. Si verifica anzitutto la proprietà per $n = 0$. Si ha

$$\sum_{k=0}^0 q^k = q^0 = 1$$

e, poiché $q \neq 1$,

$$\frac{1 - q^{0+1}}{1 - q} = \frac{1 - q}{1 - q} = 1.$$

I due membri coincidono; pertanto $0 \in A$ e il passo base è verificato.

Passo induttivo. Sia $n \in A$. Per definizione di A , vale l'ipotesi induttiva

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Si deve dimostrare che anche il naturale successivo appartiene ad A , ossia che $n + 1 \in A$. La tesi induttiva consiste quindi nel verificare

$$\sum_{k=0}^{n+1} q^k = \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}.$$

Separando dalla sommatoria l'ultimo addendo e applicando l'ipotesi induttiva, si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n+1} q^k &= \sum_{k=0}^n q^k + q^{n+1} \\ &= \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} + q^{n+1} \\ &= \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1}(1 - q)}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q^{n+1} + q^{n+1} - q^{n+2}}{1 - q} \\ &= \frac{1 - q^{n+2}}{1 - q}. \end{aligned}$$

L'ultima espressione coincide con quella richiesta dalla tesi induttiva; pertanto $n + 1 \in A$. Risulta quindi verificata l'implicazione

$$n \in A \implies n + 1 \in A.$$

Essendo verificati sia il passo base sia il passo induttivo, per il [teorema 1.1](#), con valore iniziale $p = 0$, si conclude che

$$A = \mathbb{N}.$$

Poiché $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ era arbitrario, si conclude che

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$ e per ogni $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. □

2 Lezione 2: numeri interi, razionali e fattoriale

2.1 Numeri interi

Dato un insieme A , si indica con $-A$ l'insieme degli opposti dei suoi elementi:

$$-A = \{-a : a \in A\}.$$

Poiché $0 \in \mathbb{N}$, l'insieme $-\mathbb{N}$ contiene 0 e gli opposti dei naturali positivi. L'unione di $\mathbb{N}$ e $-\mathbb{N}$ permette quindi di introdurre l'insieme dei numeri interi.

Definizione 2.1 (Numeri interi).

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup (-\mathbb{N}).$$

Si assume l'*assioma di esistenza e unicità dell'opposto*, secondo cui ogni intero ammette un unico opposto, anch'esso appartenente a $\mathbb{Z}$. In forma più precisa, vale

$$\forall m \in \mathbb{Z} \exists! n \in \mathbb{Z} \text{ tale che } m + n = 0.$$

Tale unico intero è indicato con $-m$ ed è detto *opposto* di m .

L'ordinamento è compatibile con la moltiplicazione per un intero positivo; se invece il fattore è negativo, il verso della disuguaglianza si inverte.

Proposizione 2.1 (Compatibilità dell'ordine in $\mathbb{Z}$). Per ogni $a, b, c \in \mathbb{Z}$, se $a \leq b$, allora

$$c > 0 \implies ac \leq bc, \quad c < 0 \implies ac \geq bc.$$

In particolare, moltiplicare una disuguaglianza per un numero negativo inverte il verso. Se $c = 0$, invece, si ha

$$ac = bc = 0.$$

La dimostrazione della [proposizione 2.1](#) non viene sviluppata in questa sede.

Si pone allora il problema di stabilire se, dato $a \in \mathbb{Z}$, esista $b \in \mathbb{Z}$ tale che

$$ab = 1.$$

Quando un tale elemento esiste, esso è detto *inverso moltiplicativo* di a e viene indicato con a^{-1} , ossia

$$a^{-1} := b.$$

In $\mathbb{Z}$, tuttavia, l'inverso moltiplicativo non esiste per ogni elemento.

Proposizione 2.2 (Inversi moltiplicativi in $\mathbb{Z}$). Gli unici interi che ammettono un inverso moltiplicativo in $\mathbb{Z}$ sono -1 e 1 . In particolare,

$$(-1)^{-1} = -1, \quad 1^{-1} = 1.$$

Dimostrazione. Siano $a, b \in \mathbb{Z}$ tali che $ab = 1$. Il prodotto è positivo, perciò a e b hanno lo stesso segno. Se sono entrambi positivi, sono interi almeno uguali a 1; affinché il loro prodotto sia 1, devono quindi essere entrambi uguali a 1. Se sono entrambi negativi, gli interi positivi $-a$ e $-b$ hanno prodotto 1, perciò $a = b = -1$. Viceversa, $(-1)(-1) = 1$ e $1 \cdot 1 = 1$, da cui seguono le uguaglianze enunciate. $\square$

2.2 Numeri razionali

Come mostrato nella [proposizione 2.2](#), in $\mathbb{Z}$ soltanto -1 e 1 ammettono un inverso moltiplicativo. Ciò motiva l'introduzione di un insieme numerico più ampio, nel quale sia possibile rappresentare anche rapporti tra numeri interi.

Nella definizione dei numeri razionali sarà utile escludere lo zero dall'insieme dei possibili denominatori. A questo scopo, per due insiemi A e B , si introduce la differenza insiemistica

$$A \setminus B = \{x \in A : x \notin B\},$$

ossia l'insieme degli elementi di A che non appartengono a B .

In particolare,

$$\mathbb{N} \setminus \{0\}$$

indica l'insieme dei numeri naturali diversi da zero.

Definizione 2.2 (Numeri razionali). L'insieme dei numeri razionali è

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}.$$

L'introduzione dei numeri razionali estende quindi gli insiemi numerici considerati finora, secondo la catena di inclusioni

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}.$$

Il denominatore viene scelto positivo; un eventuale segno negativo si riporta quindi al numeratore. Uno stesso numero razionale può essere rappresentato da frazioni diverse, come $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$. Riducendo la frazione ai minimi termini si ottiene una rappresentazione con $\text{mcd}(m, n) = 1$, dove il massimo comune divisore è inteso come quello positivo di $|m|$ e n . Con il denominatore positivo, questa forma ridotta è unica; in particolare, lo zero si rappresenta come $\frac{0}{1}$.

In $\mathbb{Q}$, invece, si assume l'*assioma dell'inverso moltiplicativo*:

$$\forall a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\} \exists! b \in \mathbb{Q} \text{ tale che } ab = 1.$$

Con la notazione a^{-1} introdotta nella [sezione 2.1](#), tale unico elemento si indica con

$$b = a^{-1}.$$

L'inverso moltiplicativo di un numero razionale non nullo è detto anche *reciproco*. Per esempio,

$$2^{-1} = \frac{1}{2}.$$

2.3 Irrazionalità di $\sqrt{2}$

La costruzione dei razionali non è sufficiente a descrivere tutti i numeri che emergono naturalmente nelle equazioni. Si consideri il polinomio

$$p(x) = x^2 - 2, \quad p \in \mathbb{Q}[x].$$

La notazione $\mathbb{Q}[x]$ indica l'insieme dei polinomi nella variabile x con coefficienti razionali. L'equazione $x^2 - 2 = 0$ non ammette soluzioni razionali. Nel seguito questo risultato sarà anche scritto nella forma $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$: l'esistenza in $\mathbb{R}$ del numero reale non negativo il cui quadrato è 2, e quindi la legittimità di tale notazione, sarà giustificata nella [sezione 3.5](#).

Per affrontare la dimostrazione di questo risultato, si introduce anzitutto la nozione di parità di un intero, che verrà utilizzata in seguito.

Un intero m si dice *pari* se esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che

$$m = 2k,$$

mentre si dice *dispari* se esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che

$$m = 2k + 1.$$

Ogni intero è pari oppure dispari, e le due possibilità sono mutuamente esclusive.

Lemma 2.1 (Parità del quadrato). *Per ogni $m \in \mathbb{Z}$, se m^2 è pari, allora m è pari.*

Dimostrazione. Richiamando la contronominale introdotta nella [sezione 1.3](#), è sufficiente dimostrare che, se m è dispari, allora m^2 è dispari. Poiché m è dispari, esiste $k \in \mathbb{Z}$ tale che

$$m = 2k + 1.$$

Pertanto

$$\begin{aligned} m^2 &= (2k + 1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 4k(k + 1) + 1. \end{aligned}$$

Ponendo

$$\ell = 2k(k + 1) \in \mathbb{Z},$$

si ottiene

$$m^2 = 2\ell + 1,$$

quindi m^2 è dispari. La contronominale è pertanto verificata e il lemma segue. $\square$

Teorema 2.1 (Irrazionalità di $\sqrt{2}$). *L'equazione $x^2 - 2 = 0$ non ammette soluzioni $x \in \mathbb{Q}$. Con la notazione anticipata sopra, equivalentemente,*

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Dimostrazione. Si procede per assurdo. Si supponga che esista $x \in \mathbb{Q}$ tale che

$$x^2 = 2.$$

Scrivendo x in forma ridotta, esistono $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tali che

$$x = \frac{m}{n}, \quad \text{mcd}(m, n) = 1.$$

Pertanto

$$\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2.$$

Poiché $n \neq 0$, si può moltiplicare per n^2 e ottenere

$$m^2 = 2n^2.$$

Di conseguenza, m^2 è pari e, per il [lemma 2.1](#), anche m è pari. Esiste quindi $h \in \mathbb{Z}$ tale che $m = 2h$. Sostituendo nell'uguaglianza precedente,

$$\begin{aligned} 4h^2 &= 2n^2, \\ n^2 &= 2h^2. \end{aligned}$$

Pertanto anche n^2 è pari e, applicando nuovamente il [lemma 2.1](#), si conclude che n è pari.

Entrambi gli interi m e n sono dunque divisibili per 2, in contraddizione con $\text{mcd}(m, n) = 1$. La contraddizione mostra che l'ipotesi iniziale è falsa. L'equazione $x^2 - 2 = 0$ non ammette quindi soluzioni razionali; in particolare,

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Dal punto di vista logico, la dimostrazione segue lo schema per assurdo descritto nella [sezione 1.3](#). Indicando con

$$B : \quad x^2 - 2 = 0 \text{ non ammette soluzioni in } \mathbb{Q},$$

si assume la negazione $\neg B$ e da questa si ricava una contraddizione. Pertanto $\neg B$ è falsa e la tesi B è vera. $\square$

Nel risultato appena dimostrato compare il numero 2, che è un numero primo. Prima di formulare la generalizzazione, si richiama la relativa definizione.

Definizione 2.3 (Numero primo). Un numero naturale $p > 1$ è primo se i suoi unici divisori positivi sono 1 e p .

Per esempio, 2 e 3 sono primi, mentre 4 non lo è perché ammette 2 come divisore oltre a 1 e a sé stesso. Il numero 1 non è primo, poiché la definizione richiede $p > 1$.

Con questa terminologia, il risultato del [teorema 2.1](#) si generalizza alla radice quadrata di ogni numero primo.

Proposizione 2.3 (Irrazionalità della radice di un numero primo). Sia $p \in \mathbb{N}$ un numero primo. L'equazione

$$x^2 - p = 0$$

non ammette soluzioni razionali. Quando si usa la consueta notazione $\sqrt{p}$ per la radice quadrata reale non negativa di p , il risultato si esprime nella forma

$$\sqrt{p} \notin \mathbb{Q}.$$

La dimostrazione della [proposizione 2.3](#) non viene sviluppata in questa sede.

2.4 Fattoriale

Per definire il fattoriale si fissa anzitutto il valore iniziale in $n = 0$ e si specifica poi come ricavare il valore al naturale successivo.

Definizione 2.4 (Fattoriale). Il fattoriale è definito ricorsivamente dalle condizioni

$$0! := 1, \quad (n+1)! := (n+1)n!, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Applicando la [definizione 2.4](#) si ottengono, per esempio,

$$\begin{aligned} 0! &= 1, \\ 1! &= 1 \cdot 0! = 1, \\ 2! &= 2 \cdot 1! = 2, \\ 3! &= 3 \cdot 2! = 3 \cdot 2 \cdot 1. \end{aligned}$$

Per $n \geq 1$, il fattoriale può essere scritto anche nella forma esplicita

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n = \prod_{i=1}^n i.$$

Il caso $n = 0$ è specificato separatamente da $0! = 1$. La ricorrenza costruisce il prodotto aggiungendo a ogni passo il fattore successivo.

A partire dalla [definizione 2.4](#) è possibile ricavare alcune semplici proprietà del fattoriale. In particolare, il fattoriale di un numero naturale è sempre maggiore o uguale al numero stesso.

Proposizione 2.4 (Una disuguaglianza per il fattoriale). Per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$n! \geq n.$$

Dimostrazione. Per applicare il [teorema 1.1](#), introdotto nella [sezione 1.4](#), si considera l'insieme dei numeri naturali per i quali la disuguaglianza è verificata:

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n! \geq n\}.$$

Passo base. Si verifica anzitutto la proprietà per $n = 0$. Per la [definizione 2.4](#),

$$0! = 1 \geq 0,$$

quindi $0 \in A$ e il passo base è verificato.

Passo induttivo. Si deve dimostrare che

$$n \in A \implies n+1 \in A.$$

Il caso $n = 0$ viene verificato direttamente:

$$1! = 1 \geq 1,$$

quindi $1 \in A$.

Si consideri ora $n \geq 1$ e si supponga $n \in A$. Per definizione di A , vale l'ipotesi induttiva

$$n! \geq n.$$

Poiché $n + 1 > 0$, per la [proposizione 1.1](#), moltiplicando entrambi i membri per $n + 1$ il verso della disuguaglianza non cambia. Si ottiene quindi

$$(n + 1)n! \geq (n + 1)n.$$

Per la [definizione 2.4](#),

$$(n + 1)! = (n + 1)n!,$$

e pertanto

$$(n + 1)! \geq (n + 1)n.$$

Resta da confrontare $(n + 1)n$ con $n + 1$. Poiché $n \geq 1$ e $n + 1 > 0$, moltiplicando la disuguaglianza $n \geq 1$ per $n + 1$ si ottiene

$$(n + 1)n \geq (n + 1) \cdot 1 = n + 1.$$

Combinando le due disuguaglianze,

$$(n + 1)! \geq (n + 1)n \geq n + 1.$$

Si è quindi dimostrato che $n + 1 \in A$.

Il passo induttivo è dunque verificato sia per $n = 0$, tramite controllo diretto, sia per ogni $n \geq 1$. Essendo verificati il passo base e il passo induttivo, per il [teorema 1.1](#), con valore iniziale $p = 0$, si conclude che

$$\mathbb{N} \subseteq A.$$

Poiché, per definizione, $A \subseteq \mathbb{N}$, segue che

$$A = \mathbb{N}.$$

Di conseguenza,

$$n! \geq n$$

per ogni $n \in \mathbb{N}$. □

3 Lezione 3: coefficienti binomiali e numeri reali

3.1 Coefficienti binomiali

La definizione del fattoriale introdotta nella [definizione 2.4](#) permette di definire i coefficienti binomiali. Essi saranno considerati per ogni coppia di numeri naturali.

Definizione 3.1 (Coefficiente binomiale). Siano $n, k \in \mathbb{N}$. Si definisce

$$\binom{n}{k} := \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{se } k \leq n, \\ 0, & \text{se } k > n. \end{cases}$$

Dalla [definizione 3.1](#) si ricavano immediatamente alcuni casi particolari. Per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!n!} = 1$$

e

$$\binom{n}{n} = \frac{n!}{n!0!} = 1.$$

Inoltre, per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \binom{n}{n-1} &= \frac{n!}{(n-1)!(n-(n-1))!} \\ &= \frac{n!}{(n-1)!1!} \\ &= n. \end{aligned}$$

Una prima proprietà fondamentale dei coefficienti binomiali è la loro simmetria rispetto agli indici k e $n-k$.

Proposizione 3.1 (Simmetria dei coefficienti binomiali). Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ con $k \leq n$ vale

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

Dimostrazione. Per la [definizione 3.1](#),

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

D'altra parte,

$$\begin{aligned} \binom{n}{n-k} &= \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)!k!}. \end{aligned}$$

Poiché il prodotto è commutativo, i due denominatori coincidono e quindi

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

□

Un'altra relazione fondamentale è l'identità di Pascal, che esprime un coefficiente binomiale come somma di due coefficienti della riga precedente.

Proposizione 3.2 (Identità di Pascal). *Per ogni $n, k \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$ e $1 \leq k \leq n$ vale*

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Dimostrazione. Si considera anzitutto il caso $1 \leq k \leq n-1$. Applicando la [definizione 3.1](#), si ottiene

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!}.$$

Poiché, per la [definizione 2.4](#),

$$(n-k)! = (n-k)(n-k-1)! \quad \text{e} \quad k! = k(k-1)!,$$

si può raccogliere il fattore comune

$$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!}$$

e ottenere

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k} \right) \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \frac{n}{k(n-k)} \\ &= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\ &= \binom{n}{k}. \end{aligned}$$

Resta il caso $k = n$. Per la [definizione 3.1](#),

$$\binom{n-1}{n} = 0,$$

mentre

$$\binom{n-1}{n-1} = 1 \quad \text{e} \quad \binom{n}{n} = 1.$$

Pertanto anche in questo caso

$$\binom{n}{n} = \binom{n-1}{n-1} + \binom{n-1}{n}.$$

□

Benché la formula della [definizione 3.1](#) sia espressa come rapporto di fattoriali, il suo valore è sempre un numero naturale:

$$\binom{n}{k} \in \mathbb{N} \quad \forall n, k \in \mathbb{N}.$$

La dimostrazione di questa proprietà non viene sviluppata in questa sede.

3.2 Numeri reali

Gli insiemi numerici introdotti finora sono legati dalla catena di inclusioni

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}.$$

Come mostrato nel [teorema 2.1](#), l'equazione $x^2 - 2 = 0$ non ammette soluzioni razionali. Si introduce pertanto un insieme numerico più ampio, l'insieme dei numeri reali $\mathbb{R}$, ottenendo

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}.$$

Nella [sezione 3.5](#) si tornerà sull'equazione $x^2 = 2$ per giustificare l'esistenza in $\mathbb{R}$ della sua soluzione non negativa.

Nel seguito si utilizza una proprietà di completezza di $\mathbb{R}$, formulata mediante il cosiddetto assioma di separazione.

Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ due insiemi non vuoti. Si dice che A e B sono *separati*, con A a sinistra di B , se

$$a \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

Assioma di separazione. Se $A, B \subseteq \mathbb{R}$ sono non vuoti e separati, allora esiste almeno un numero reale x tale che

$$a \leq x \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

Un tale numero x è detto *elemento separatore* degli insiemi A e B .

L'assioma di separazione esprime una proprietà caratteristica dei numeri reali. Esistono altre formulazioni equivalenti della completezza di $\mathbb{R}$, ma non vengono sviluppate in questa sede.

3.3 Proprietà archimedeia

L'[assioma di separazione](#) permette di dimostrare che i numeri naturali non sono superiormente limitati nell'insieme dei reali.

Teorema 3.1 (Proprietà archimedeia). Per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste $n \in \mathbb{N}$ tale che

$$n > x.$$

Equivalentemente,

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists n \in \mathbb{N} : n > x.$$

Dimostrazione. Sia $x \in \mathbb{R}$.

Se $x \leq 0$, è sufficiente scegliere $n = 1$, poiché

$$1 > x.$$

Si considera quindi il caso $x > 0$ e si pone

$$A = \{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}.$$

Poiché $0 \leq x$, si ha $0 \in A$, dunque $A \neq \emptyset$. L'obiettivo è mostrare che $A \neq \mathbb{N}$. Infatti, da questa disuguaglianza seguirebbe l'esistenza di un naturale $n \notin A$, cioè di un naturale per cui $n > x$.

Si procede per assurdo supponendo

$$A = \mathbb{N}.$$

Si definisce allora

$$B = \{y \in \mathbb{R} : y \geq n \text{ per ogni } n \in \mathbb{N}\}.$$

Dall'ipotesi $A = \mathbb{N}$ segue che

$$n \leq x \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

perciò $x \in B$ e quindi $B \neq \emptyset$.

Inoltre, per ogni $n \in A = \mathbb{N}$ e per ogni $y \in B$, dalla definizione di B si ha

$$n \leq y.$$

Gli insiemi A e B sono dunque separati. Per l'**assioma di separazione** esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$n \leq \lambda \leq y \quad \forall n \in A, \forall y \in B.$$

Poiché $A = \mathbb{N}$, per ogni $n \in \mathbb{N}$ anche $n + 1 \in A$. Dalla proprietà di separazione segue quindi

$$n + 1 \leq \lambda,$$

da cui

$$n \leq \lambda - 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Per definizione di B , ciò implica

$$\lambda - 1 \in B.$$

D'altra parte, essendo λ un elemento separatore, vale

$$\lambda \leq y \quad \forall y \in B.$$

Scegliendo in particolare $y = \lambda - 1$, si ottiene

$$\lambda \leq \lambda - 1,$$

ovvero

$$1 \leq 0,$$

che è assurdo.

L'ipotesi $A = \mathbb{N}$ è pertanto falsa. Esiste quindi almeno un $n \in \mathbb{N} \setminus A$, e dalla definizione di A segue

$$n > x.$$

□

3.4 Parte intera, floor e ceiling

Il [teorema 3.1](#) conduce a un'importante caratterizzazione della posizione di un numero reale rispetto agli interi consecutivi.

Proposizione 3.3 (Proprietà della parte intera). *Per ogni $x \in \mathbb{R}$ esiste un unico $n \in \mathbb{Z}$ tale che*

$$n \leq x < n + 1.$$

In simboli,

$$\forall x \in \mathbb{R} \exists! n \in \mathbb{Z} : n \leq x < n + 1.$$

La dimostrazione della [proposizione 3.3](#) non viene sviluppata in questa sede.

La [proposizione 3.3](#) garantisce quindi che ogni numero reale x individua un unico intero n che non supera x , mentre l'intero successivo $n + 1$ lo supera strettamente. Tale intero coincide con il più grande intero minore o uguale a x e viene chiamato *parte intera* di x .

Questa proprietà permette di introdurre una funzione che associa a ogni numero reale la sua parte intera.

Definizione 3.2 (Funzione floor). Per ogni $x \in \mathbb{R}$, si definisce

$$\lfloor x \rfloor = n,$$

dove $n \in \mathbb{Z}$ è l'unico intero individuato dalla [proposizione 3.3](#).

Equivalentemente,

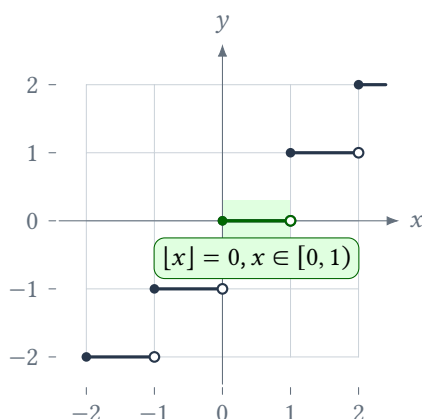
$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

La funzione floor associa quindi a ogni numero reale il più grande intero che non lo supera. Nel seguito si utilizza la consueta notazione degli intervalli reali, che sarà formalizzata nella [sezione 4.2](#). Per esempio,

$$\lfloor x \rfloor = 0 \quad \text{per ogni } x \in [0, 1).$$

Più in generale, per ogni $n \in \mathbb{Z}$,

$$\lfloor x \rfloor = n \iff n \leq x < n + 1 \iff x \in [n, n + 1).$$



Esempi in Python

```
from math import floor

print(floor(0.5))    # Output: 0
print(floor(-0.5))   # Output: -1
print(floor(1.0))    # Output: 1
```

Figura 3.1. Grafico della funzione floor ed esempi d'uso in Python.

In modo analogo alla [definizione 3.2](#) si introduce la funzione ceiling, che associa a ogni numero reale il più piccolo intero maggiore o uguale al numero stesso.

Definizione 3.3 (Funzione ceiling). Per ogni $x \in \mathbb{R}$, si definisce

$$\lceil x \rceil = m,$$

dove $m \in \mathbb{Z}$ è l'unico intero tale che

$$m - 1 < x \leq m.$$

Equivalentemente,

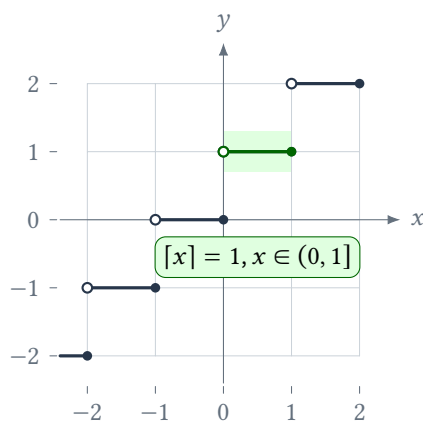
$$\lceil x \rceil - 1 < x \leq \lceil x \rceil.$$

La funzione ceiling associa quindi a ogni numero reale il più piccolo intero maggiore o uguale al numero stesso. Per esempio,

$$\lceil x \rceil = 1 \quad \text{per ogni } x \in (0, 1].$$

Più in generale, per ogni $m \in \mathbb{Z}$,

$$\lceil x \rceil = m \iff m - 1 < x \leq m \iff x \in (m - 1, m].$$



Esempi in Python

```
from math import ceil

print(ceil(0.5))    # Output: 1
print(ceil(-0.5))   # Output: 0
print(ceil(1.0))    # Output: 1
```

Figura 3.2. Grafico della funzione ceiling ed esempi d'uso in Python.

3.5 Cenno su $\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Nel [teorema 2.1](#) è stato dimostrato che

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}.$$

Per motivare l'esistenza in $\mathbb{R}$ di un numero reale non negativo il cui quadrato sia 2, si considerano gli insiemi

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0, x^2 < 2\}, \quad B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0, x^2 > 2\}.$$

Gli insiemi A e B sono non vuoti, poiché $0 \in A$ e $2 \in B$. Resta da verificare che siano separati. Una volta verificata questa condizione, l'[assioma di separazione](#) garantisce l'esistenza di un elemento separatore $\lambda \in \mathbb{R}$. Geometricamente, tale elemento si colloca tra i due insiemi

$$a \leq \lambda \leq b \quad \forall a \in A, \forall b \in B.$$

Il passaggio conclusivo consiste nel mostrare che

$$\lambda^2 = 2.$$

Completando le verifiche omesse, ossia la separazione di A e B e l'identità $\lambda^2 = 2$, si ottiene $\lambda \geq 0$ e $\lambda^2 = 2$, dunque $\lambda = \sqrt{2}$. Insieme al [teorema 2.1](#), ciò mostra che

$$\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}.$$

4 Lezione 4: densità, intervalli ed estremi

4.1 Densità dei numeri razionali

La proprietà archimedeica e la proprietà della parte intera, introdotte rispettivamente nel [teorema 3.1](#) e [proposizione 3.3](#), permettono di mostrare che ogni numero reale può essere approssimato arbitrariamente da numeri razionali.

Teorema 4.1 (Densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$). Per ogni $x \in \mathbb{R}$ e per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $z \in \mathbb{Q}$ tale che

$$z \leq x < z + \varepsilon.$$

Dimostrazione. Siano $x \in \mathbb{R}$ ed $\varepsilon > 0$. Poiché

$$\frac{1}{\varepsilon} > 0,$$

per il [teorema 3.1](#) esiste $q \in \mathbb{N}$ tale che

$$q > \frac{1}{\varepsilon}.$$

In particolare $q > 0$.

Si considera allora il numero reale qx . Per la [proposizione 3.3](#) esiste $p \in \mathbb{Z}$ tale che

$$p \leq qx < p + 1.$$

Dividendo per $q > 0$, il verso delle disuguaglianze non cambia e si ottiene

$$\frac{p}{q} \leq x < \frac{p+1}{q} = \frac{p}{q} + \frac{1}{q}.$$

Dalla scelta di q segue

$$\frac{1}{q} < \varepsilon.$$

Pertanto

$$\frac{p}{q} \leq x < \frac{p}{q} + \frac{1}{q} < \frac{p}{q} + \varepsilon.$$

Ponendo

$$z = \frac{p}{q},$$

si ha $z \in \mathbb{Q}$ e quindi

$$z \leq x < z + \varepsilon.$$

□

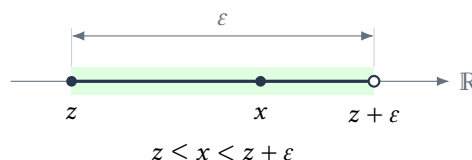


Figura 4.1. Interpretazione geometrica del [teorema 4.1](#): il numero razionale z dista da x meno di ε .

Un'ulteriore conseguenza del [teorema 4.1](#), insieme all'esistenza di numeri irrazionali discussa nella [sezione 3.5](#), è che tra due numeri reali distinti esistono sia numeri razionali sia numeri irrazionali.

Teorema 4.2 (Razionali e irrazionali tra due reali). Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Allora:

1. esiste $r \in \mathbb{Q}$ tale che

$$a < r < b;$$

2. esiste $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ tale che

$$a < \alpha < b.$$

La dimostrazione del [teorema 4.2](#) non viene sviluppata in questa sede.

4.2 Intervalli della retta reale

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$. Si introducono le seguenti notazioni:

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\},$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}.$$

Definizione 4.1 (Intervallo della retta reale). Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, con $A \neq \emptyset$. L'insieme A si dice *intervallo* se e solo se, per ogni $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$, vale

$$\{x \in \mathbb{R} : x_1 < x < x_2\} \subseteq A.$$

In altri termini, se due punti appartengono a un intervallo, allora anche ogni punto reale compreso strettamente tra essi appartiene allo stesso insieme.

Esempio 4.1. Si consideri

$$A = (0, 1) \cup \{2\}.$$

L'insieme $(0, 1)$ è un intervallo, mentre A non lo è. Infatti si possono scegliere, per esempio,

$$x_1 = \frac{1}{2} \in A, \quad x_2 = 2 \in A,$$

ma

$$\frac{3}{2} \in \left(\frac{1}{2}, 2\right) \quad \text{e} \quad \frac{3}{2} \notin A.$$

La condizione della [definizione 4.1](#) non è quindi soddisfatta.

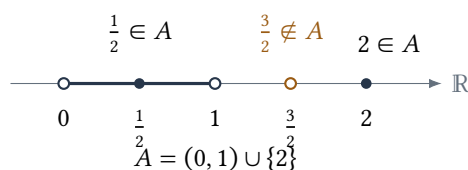


Figura 4.2. L'insieme $A = (0, 1) \cup \{2\}$ non è un intervallo: tra $\frac{1}{2}$ e 2 esistono punti, come $\frac{3}{2}$, che non appartengono ad A .

4.3 Maggioranti, minoranti e insiemi limitati

Si consideri un insieme non vuoto $A \subseteq \mathbb{R}$.

Definizione 4.2 (Maggiorante). Un numero reale $x \in \mathbb{R}$ si dice *maggiorante* di A se e solo se

$$a \leq x \quad \forall a \in A.$$

Un maggiorante non deve necessariamente appartenere ad A .

Definizione 4.3 (Minorante). Un numero reale $x \in \mathbb{R}$ si dice *minorante* di A se e solo se

$$x \leq a \quad \forall a \in A.$$

Anche un minorante non deve necessariamente appartenere ad A .

Per l'insieme considerato nell'[esempio 4.1](#),

$$A = (0, 1) \cup \{2\},$$

il numero 2 è un maggiorante e anche 3 è un maggiorante. Analogamente, 0 e $-\frac{1}{2}$ sono minoranti.

Definizione 4.4 (Limitatezza superiore e inferiore). Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, con $A \neq \emptyset$.

1. A si dice *inferiormente limitato* se ammette almeno un minorante;
2. A si dice *superiormente limitato* se ammette almeno un maggiorante.

Definizione 4.5 (Insieme limitato). Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, con $A \neq \emptyset$. Si dice che A è *limitato* se è sia inferiormente sia superiormente limitato.

L'insieme $A = (0, 1) \cup \{2\}$ è quindi limitato.

La limitatezza si conserva passando a un sottoinsieme non vuoto.

Proposizione 4.1 (Limitatezza dei sottoinsiemi). Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$, con $B \neq \emptyset$ e $B \subseteq A$.

1. Se A è inferiormente limitato, allora B è inferiormente limitato.
2. Se A è superiormente limitato, allora B è superiormente limitato.

Dimostrazione. Si dimostra il primo punto. Se A è inferiormente limitato, esiste un minorante $x \in \mathbb{R}$ di A , cioè

$$x \leq a \quad \forall a \in A.$$

Poiché $B \subseteq A$, per ogni $b \in B$ vale anche

$$x \leq b.$$

Il numero x è dunque un minorante di B , e quindi B è inferiormente limitato.

Il secondo punto si dimostra in modo analogo sostituendo i minoranti con i maggioranti. □

4.3.1 Esempi fondamentali

Per ogni $n \in \mathbb{N}$ si ha

$$0 \leq n.$$

Il numero 0 è quindi un minorante di $\mathbb{N}$, e pertanto $\mathbb{N}$ è inferiormente limitato.

L'insieme $\mathbb{N}$ non è invece superiormente limitato. Infatti, se esistesse $x \in \mathbb{R}$ tale che

$$n \leq x \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

si avrebbe un maggiorante reale di $\mathbb{N}$, in contraddizione con il [teorema 3.1](#).

Anche $\mathbb{Z}$ non è superiormente limitato. Se lo fosse, poiché

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z},$$

dalla [proposizione 4.1](#) seguirebbe che anche $\mathbb{N}$ sarebbe superiormente limitato, contro quanto appena dimostrato.

L'insieme $\mathbb{Z}$ non è neppure inferiormente limitato. Supponendo per assurdo che esista $b \in \mathbb{R}$ tale che

$$b \leq z \quad \forall z \in \mathbb{Z},$$

cambiando segno a entrambi i membri, per le proprietà dell'ordine in $\mathbb{R}$ si ottiene

$$-z \leq -b \quad \forall z \in \mathbb{Z}.$$

Poiché, al variare di $z \in \mathbb{Z}$, anche $-z$ descrive tutti gli interi, $-b$ sarebbe un maggiorante di $\mathbb{Z}$, in contraddizione con il fatto che $\mathbb{Z}$ non è superiormente limitato.

Poiché

$$\mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R},$$

se $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{R}$ fossero limitati superiormente oppure inferiormente, la [proposizione 4.1](#) imporrebbe la corrispondente limitatezza anche a $\mathbb{Z}$. Ne segue che $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$ non sono né superiormente né inferiormente limitati.

4.4 Massimo e minimo

Nelle [definizioni 4.2](#) e [4.3](#) non si richiede che il maggiorante o il minorante appartengano all'insieme. Per massimo e minimo, invece, l'appartenenza è essenziale.

Definizione 4.6 (Massimo e minimo). Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, con $A \neq \emptyset$.

1. A ammette *massimo* se esiste $x_0 \in A$ tale che

$$a \leq x_0 \quad \forall a \in A.$$

In tal caso si scrive $x_0 = \max A$.

2. A ammette *minimo* se esiste $x_0 \in A$ tale che

$$x_0 \leq a \quad \forall a \in A.$$

In tal caso si scrive $x_0 = \min A$.

Si può quindi interpretare il massimo come un maggiorante che appartiene all'insieme stesso e il minimo come un minorante che appartiene all'insieme stesso.

Per esempio, se

$$A = (0, 1],$$

allora

$$\max A = 1.$$

L'insieme non ammette invece minimo. Infatti, per ogni $a \in A$ si ha $0 < a/2 < a \leq 1$, dunque $a/2 \in A$ e $a/2 < a$; nessun elemento di A può quindi essere il minimo.

Per descrivere in modo sistematico maggioranti e minoranti si introducono i due insiemi

$$M_A := \{x \in \mathbb{R} : x \text{ è un maggiorante di } A\},$$

$$m_A := \{x \in \mathbb{R} : x \text{ è un minorante di } A\}.$$

Nel caso $A = (0, 1]$,

$$M_A = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 1\},$$

mentre

$$m_A = \{x \in \mathbb{R} : x \leq 0\}.$$

In particolare,

$$1 = \min M_A \quad \text{e} \quad 0 = \max m_A.$$

Si osserva quindi che M_A raccoglie tutti i maggioranti di A , mentre m_A raccoglie tutti i suoi minoranti. Nel caso considerato, 1 è il più piccolo tra tutti i maggioranti e 0 è il più grande tra tutti i minoranti.

Teorema 4.3 (Estremi degli insiemi di maggioranti e minoranti). Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, con $A \neq \emptyset$.

1. Se A è superiormente limitato, allora M_A ammette minimo.
2. Se A è inferiormente limitato, allora m_A ammette massimo.

La dimostrazione del [teorema 4.3](#) non viene sviluppata in questa sede.

4.5 Estremo superiore ed estremo inferiore

Il [teorema 4.3](#) permette di definire i due estremi fondamentali di un insieme reale non vuoto.

Definizione 4.7 (Estremo inferiore). Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, con $A \neq \emptyset$, inferiormente limitato. Si chiama *estremo inferiore* di A , e si indica con $\inf A$, il massimo dell'insieme dei minoranti:

$$\inf A := \max m_A.$$

Definizione 4.8 (Estremo superiore). Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, con $A \neq \emptyset$, superiormente limitato. Si chiama *estremo superiore* di A , e si indica con $\sup A$, il minimo dell'insieme dei maggioranti:

$$\sup A := \min M_A.$$

Per convenzione, se A non è superiormente limitato si scrive

$$\sup A = +\infty,$$

mentre, se A non è inferiormente limitato, si scrive

$$\inf A = -\infty.$$

I simboli $+\infty$ e $-\infty$ non rappresentano numeri reali; sono utilizzati qui esclusivamente come convenzione notazionale.

Massimo e minimo, quando esistono, coincidono rispettivamente con estremo superiore ed estremo inferiore.

Proposizione 4.2 (Relazione tra estremi, massimo e minimo). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, con $A \neq \emptyset$.*

1. *Se $\sup A \in A$, allora*

$$\sup A = \max A.$$

2. *Se $\inf A \in A$, allora*

$$\inf A = \min A.$$

La dimostrazione della [proposizione 4.2](#) non viene sviluppata in questa sede.

4.6 Caratterizzazione di estremo superiore e inferiore

Le definizioni precedenti possono essere espresse mediante condizioni che descrivono quanto gli elementi dell'insieme possano avvicinarsi ai suoi estremi.

Teorema 4.4 (Caratterizzazione dell'estremo superiore). *Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, con $A \neq \emptyset$, superiormente limitato. Per $x \in \mathbb{R}$,*

$$x = \sup A$$

se e solo se valgono entrambe le condizioni

$$x \geq a \quad \forall a \in A$$

e

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{a} \in A \quad \text{tale che} \quad \bar{a} > x - \varepsilon.$$

La prima condizione afferma, secondo la [definizione 4.2](#), che x è un maggiorante di A . La seconda garantisce che nessun numero strettamente minore di x possa essere un maggiorante. Poiché ogni elemento di A è minore o uguale a x , le due condizioni insieme equivalgono a richiedere che, per ogni $\varepsilon > 0$, esista $\bar{a} \in A$ tale che

$$x - \varepsilon < \bar{a} \leq x.$$

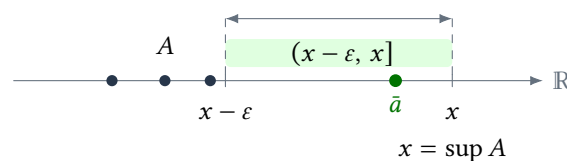


Figura 4.3. Interpretazione della caratterizzazione di $x = \sup A$: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{a} \in A$ con $x - \varepsilon < \bar{a} \leq x$.

Dimostrazione del teorema 4.4. Si dimostrano separatamente le due implicazioni.

Prima implicazione ($\Rightarrow$). Si supponga

$$x = \sup A.$$

Per la [definizione 4.8](#),

$$x = \min M_A,$$

quindi $x \in M_A$. Per la [definizione 4.2](#), ciò equivale a

$$x \geq a \quad \forall a \in A,$$

e la prima condizione è verificata.

Sia ora $\varepsilon > 0$. Poiché

$$x - \varepsilon < x = \min M_A,$$

si ha

$$x - \varepsilon \notin M_A.$$

Per definizione di M_A , un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ appartiene a M_A se e solo se $\alpha \geq a$ per ogni $a \in A$. Pertanto $x - \varepsilon \notin M_A$ significa che esiste $\bar{a} \in A$ tale che

$$x - \varepsilon < \bar{a}.$$

Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, anche la seconda condizione è verificata.

Seconda implicazione ($\Leftarrow$). Si supponga ora che valgano

$$x \geq a \quad \forall a \in A$$

e

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{a} \in A \quad \text{tale che} \quad x - \varepsilon < \bar{a}.$$

La prima condizione implica, per la [definizione 4.2](#), che $x \in M_A$.

Poiché A è superiormente limitato, per il [teorema 4.3](#) l'insieme M_A ammette minimo. Si pone

$$y := \min M_A = \sup A.$$

Dalla seconda condizione segue che, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$x - \varepsilon \notin M_A.$$

Infatti, per ciascun $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{a} \in A$ tale che $x - \varepsilon < \bar{a}$, mentre un maggiorante di A dovrebbe essere maggiore o uguale a ogni elemento di A .

Poiché $y = \min M_A$, si ha $y \in M_A$. Inoltre, ogni numero reale $t \geq y$ appartiene a M_A : infatti, essendo y un maggiorante,

$$a \leq y \leq t \quad \forall a \in A.$$

Di conseguenza, da $x - \varepsilon \notin M_A$ segue necessariamente

$$x - \varepsilon < y \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Se fosse $y < x$, scegliendo

$$\varepsilon = x - y > 0$$

si otterrebbe

$$x - \varepsilon = y < y,$$

che è assurdo. Deve quindi essere $y \geq x$.

D'altra parte, essendo $x \in M_A$ e $y = \min M_A$, vale

$$y \leq x.$$

Pertanto $x = y$. Poiché $y = \sup A$, si conclude

$$x = \sup A.$$

□

Teorema 4.5 (Caratterizzazione dell'estremo inferiore). Sia $A \subseteq \mathbb{R}$, con $A \neq \emptyset$, inferiormente limitato. Per $x \in \mathbb{R}$,

$$x = \inf A$$

se e solo se valgono entrambe le condizioni

$$x \leq a \quad \forall a \in A$$

e

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{a} \in A \quad \text{tale che} \quad \bar{a} < x + \varepsilon.$$

La prima condizione afferma, secondo la [definizione 4.3](#), che x è un minorante di A . La seconda garantisce che nessun numero strettamente maggiore di x possa essere un minorante. Poiché ogni elemento di A è maggiore o uguale a x , le due condizioni insieme equivalgono a richiedere che, per ogni $\varepsilon > 0$, esista $\bar{a} \in A$ tale che

$$x \leq \bar{a} < x + \varepsilon.$$

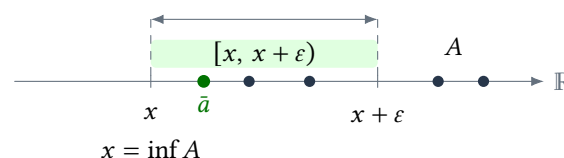


Figura 4.4. Interpretazione della caratterizzazione di $x = \inf A$: per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{a} \in A$ con $x \leq \bar{a} < x + \varepsilon$.

La dimostrazione del [teorema 4.5](#) viene lasciata al lettore come esercizio, in modo da ripercorrere in forma simmetrica il ragionamento appena svolto.

Esercizio 4.1 (Dimostrazione della caratterizzazione dell'estremo inferiore). Dimostrare il [teorema 4.5](#). Si suggerisce di seguire i due versi della dimostrazione del [teorema 4.4](#), sostituendo all'insieme M_A dei maggioranti l'insieme m_A dei minoranti e utilizzando

$$\inf A = \max m_A.$$

Dopo aver svolto autonomamente l'esercizio, si può confrontare il proprio ragionamento con la seguente soluzione.

Soluzione dell'esercizio. Si dimostrano separatamente le due implicazioni.

Prima implicazione ($\Rightarrow$). Si supponga

$$x = \inf A.$$

Per la [definizione 4.7](#),

$$x = \max m_A,$$

quindi $x \in m_A$. Per la [definizione 4.3](#), ciò equivale a

$$x \leq a \quad \forall a \in A,$$

e la prima condizione è verificata.

Sia ora $\varepsilon > 0$. Poiché

$$x + \varepsilon > x = \max m_A,$$

si ha

$$x + \varepsilon \notin m_A.$$

Per definizione di m_A , un numero $\alpha \in \mathbb{R}$ appartiene a m_A se e solo se $\alpha \leq a$ per ogni $a \in A$. Pertanto $x + \varepsilon \notin m_A$ significa che esiste $\bar{a} \in A$ tale che

$$\bar{a} < x + \varepsilon.$$

Essendo $\varepsilon > 0$ arbitrario, anche la seconda condizione è verificata.

Seconda implicazione ($\Leftarrow$). Si supponga ora che valgano

$$x \leq a \quad \forall a \in A$$

e

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{a} \in A \quad \text{tale che} \quad \bar{a} < x + \varepsilon.$$

La prima condizione implica, per la [definizione 4.3](#), che $x \in m_A$.

Poiché A è inferiormente limitato, per il [teorema 4.3](#) l'insieme m_A ammette massimo. Si pone

$$y := \max m_A = \inf A.$$

Dalla seconda condizione segue che, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$x + \varepsilon \notin m_A.$$

Infatti, per ciascun $\varepsilon > 0$ esiste $\bar{a} \in A$ tale che $\bar{a} < x + \varepsilon$, mentre un minorante di A dovrebbe essere minore o uguale a ogni elemento di A .

Poiché $y = \max m_A$, si ha $y \in m_A$. Inoltre, ogni numero reale $t \leq y$ appartiene a m_A : infatti, essendo y un minorante,

$$t \leq y \leq a \quad \forall a \in A.$$

Di conseguenza, da $x + \varepsilon \notin m_A$ segue necessariamente

$$y < x + \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Se fosse $y > x$, scegliendo

$$\varepsilon = y - x > 0$$

si otterrebbe

$$y < x + \varepsilon = y,$$

che è assurdo. Deve quindi essere $y \leq x$.

D'altra parte, essendo $x \in m_A$ e $y = \max m_A$, vale

$$x \leq y.$$

Pertanto $x = y$. Poiché $y = \inf A$, si conclude

$$x = \inf A.$$

□

5 Lezione 5: disuguaglianza di Bernoulli, binomio di Newton ed esercizi sugli estremi

5.1 Disuguaglianza di Bernoulli

Il [teorema 1.1](#) permette di dimostrare una disuguaglianza che confronta la potenza $(1+x)^n$ con l'espressione $1+nx$.

Teorema 5.1 (Disuguaglianza di Bernoulli). Per ogni $x \in \mathbb{R}$ con $x > -1$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Dimostrazione. Fissato $x > -1$, si procede per induzione su n , applicando il [teorema 1.1](#) con valore iniziale $p = 0$.

Passo base. Per $n = 0$, i due membri coincidono:

$$(1+x)^0 = 1 = 1 + 0x.$$

Passo induttivo. Sia $n \in \mathbb{N}$ e si supponga che valga l'ipotesi induttiva

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

Poiché $x > -1$, si ha $1+x > 0$. Moltiplicando entrambi i membri per $1+x$, il verso della disuguaglianza non cambia; pertanto

$$\begin{aligned} (1+x)^{n+1} &\geq (1+nx)(1+x) \\ &= 1 + (n+1)x + nx^2 \\ &\geq 1 + (n+1)x. \end{aligned}$$

L'ultima disuguaglianza segue da $nx^2 \geq 0$, poiché $n \geq 0$ e $x^2 \geq 0$. Il passo induttivo è quindi verificato.

Per il principio di induzione, la disuguaglianza vale per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poiché $x > -1$ era arbitrario, segue la tesi. $\square$

5.2 Binomio di Newton

I coefficienti binomiali introdotti nella [definizione 3.1](#) consentono di esprimere la potenza di una somma come una somma finita di prodotti di potenze.

Teorema 5.2 (Binomio di Newton). Per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$ vale

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Nella formula si adotta la convenzione $t^0 = 1$, anche per $t = 0$.

La sommatoria contiene $n + 1$ termini, corrispondenti agli indici $k = 0, 1, \dots, n$. Per $n \geq 4$, lo sviluppo si scrive anche

$$(a + b)^n = b^n + nab^{n-1} + \dots + na^{n-1}b + a^n.$$

In particolare, per $n = 2$ e $n = 3$ si ritrovano le identità

$$(a + b)^2 = b^2 + 2ab + a^2,$$

$$(a + b)^3 = b^3 + 3ab^2 + 3a^2b + a^3.$$

Il teorema può essere dimostrato mediante il [teorema 1.1](#), utilizzando l'identità di Pascal della [proposizione 3.2](#). La dimostrazione completa è sviluppata nell'[esercizio A.4](#) del primo tutorato.

5.3 Esercizi sul fattoriale

La ricorrenza della [definizione 2.4](#) permette di confrontare il fattoriale con potenze mediante il principio di induzione.

Esercizio 5.1 (Confronto tra fattoriale e potenza di 2). Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$, vale

$$n! > 2^n.$$

Soluzione dell'esercizio. Si esaminano anzitutto i valori $n < 4$:

$$0! = 1 = 2^0,$$

$$1! = 1 < 2 = 2^1,$$

$$2! = 2 < 4 = 2^2,$$

$$3! = 6 < 8 = 2^3.$$

La disuguaglianza richiesta non è quindi verificata per $n < 4$. Si dimostra ora, mediante il [teorema 1.1](#) con valore iniziale $p = 4$, che essa vale per ogni $n \geq 4$.

Passo base. Per $n = 4$,

$$4! = 24 > 16 = 2^4.$$

Passo induttivo. Sia $n \geq 4$ e si supponga $n! > 2^n$. Per la [definizione 2.4](#), moltiplicando l'ipotesi induttiva per $n + 1 > 0$, si ottiene

$$(n + 1)! = (n + 1)n! > (n + 1)2^n.$$

Poiché $n + 1 \geq 5 > 2$ e $2^n > 0$, vale inoltre

$$(n + 1)2^n > 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}.$$

Quindi $(n + 1)! > 2^{n+1}$, e il passo induttivo è verificato.

Per il [teorema 1.1](#), la disuguaglianza vale per ogni $n \geq 4$. □

Esercizio 5.2 (Confronto tra fattoriale e quadrato). Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 4$, vale

$$n! > n^2.$$

Soluzione dell'esercizio. Nel passo induttivo sarà necessario confrontare $(n+1)n^2$ con $(n+1)^2$. Poiché $n+1 > 0$, è sufficiente verificare che

$$n^2 \geq n+1.$$

Questa disuguaglianza vale per ogni $n \geq 2$. Infatti, essendo $n \geq 2$ e $n-1 \geq 1$, si ha

$$n^2 - (n+1) = n(n-1) - 1 \geq 2 - 1 = 1 > 0.$$

Pertanto $n^2 \geq n+1$ per ogni $n \geq 2$, e in particolare per $n \geq 4$.

Si applica il [teorema 1.1](#) con valore iniziale $p = 4$.

Passo base. Per $n = 4$,

$$4! = 24 > 16 = 4^2.$$

Passo induttivo. Sia $n \geq 4$ e si supponga $n! > n^2$. Usando la [definizione 2.4](#) e moltiplicando per $n+1 > 0$, si ottiene

$$(n+1)! = (n+1)n! > (n+1)n^2.$$

Poiché $n \geq 4 \geq 2$, la disuguaglianza ausiliaria dà

$$(n+1)n^2 \geq (n+1)(n+1) = (n+1)^2.$$

Pertanto $(n+1)! > (n+1)^2$. Il passo induttivo è verificato e la conclusione segue per ogni $n \geq 4$. $\square$

5.4 Esercizi sugli estremi

Le [definizioni 4.7](#) e [4.8](#) permettono di confrontare gli estremi di insiemi legati da un'inclusione e di stabilire come essi cambino passando all'insieme degli opposti. Nei casi non limitati si mantengono le convenzioni della [sezione 4.5](#). I confronti si interpretano nell'ordinamento esteso, nel quale

$$-\infty < t < +\infty \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

I simboli infiniti non sono numeri reali e non possono essere elementi di un sottoinsieme di $\mathbb{R}$.

Esercizio 5.3 (Estremi e inclusione). Siano $A, B \subseteq \mathbb{R}$ non vuoti, con $A \subseteq B$.

1. Stabilire se necessariamente $\sup A \in B$.
2. Dimostrare che $\inf B \leq \inf A$.
3. Dimostrare che $\sup A \leq \sup B$.

Soluzione dell'esercizio. Primo punto. L'appartenenza $\sup A \in B$ non è garantita, neppure quando A è superiormente limitato. Per esempio, siano

$$A = (0, 1), \quad B = (0, 1) \cup \{2\}.$$

Si ha $A \subseteq B$, ma $\sup A = 1 \notin B$. Infatti, 1 è un maggiorante di A e, per ogni $\varepsilon > 0$, il numero

$$\bar{a} = 1 - \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{1}{2}\right\}$$

appartiene ad A e soddisfa $\bar{a} > 1 - \varepsilon$. Il [teorema 4.4](#) dà quindi $\sup A = 1$. Se invece A non è superiormente limitato, $\sup A = +\infty$ non può appartenere a $B \subseteq \mathbb{R}$.

Secondo punto. Se B non è inferiormente limitato, si ha $\inf B = -\infty$, e dunque $\inf B \leq \inf A$ nell'ordinamento esteso, sia che $\inf A$ sia finito, sia che valga $\inf A = -\infty$.

Se B è inferiormente limitato, per la [proposizione 4.1](#) anche A lo è. Entrambi gli estremi inferiori sono quindi reali. Per la [definizione 4.7](#), $\inf B$ è un minorante di B , perciò

$$\inf B \leq a \quad \forall a \in A,$$

poiché $A \subseteq B$. Ne segue che $\inf B \in m_A$. Essendo $\inf A = \max m_A$, si conclude

$$\inf B \leq \inf A.$$

Terzo punto. Se B non è superiormente limitato, si ha $\sup B = +\infty$, e dunque $\sup A \leq \sup B$ nell'ordinamento esteso, sia che $\sup A$ sia finito, sia che valga $\sup A = +\infty$.

Se B è superiormente limitato, per la [proposizione 4.1](#) anche A lo è. Entrambi gli estremi superiori sono quindi reali. Per la [definizione 4.8](#), $\sup B$ è un maggiorante di B , perciò

$$a \leq \sup B \quad \forall a \in A,$$

poiché $A \subseteq B$. Ne segue che $\sup B \in M_A$. Essendo $\sup A = \min M_A$, si conclude

$$\sup A \leq \sup B.$$

□

Esercizio 5.4 (Estremi dell'insieme degli opposti). Sia $A \subseteq \mathbb{R}$ non vuoto. Con la notazione introdotta nella [sezione 2.1](#), si pone

$$-A = \{-a : a \in A\}.$$

Dimostrare che

$$\inf(-A) = -\sup A, \quad \sup(-A) = -\inf A.$$

Per gli estremi infiniti, il segno meno si interpreta mediante le convenzioni $-(+\infty) = -\infty$ e $-(-\infty) = +\infty$.

Soluzione dell'esercizio. L'insieme $-A$ è non vuoto, poiché A lo è. Come già osservato nella [proposizione 2.1](#) per gli interi, cambiare segno inverte il verso di una disuguaglianza. La stessa proprietà vale per i reali: da $a \leq t$ segue $t - a \geq 0$, ossia $-a \geq -t$. In particolare, per ogni $a, t \in \mathbb{R}$,

$$a \leq t \iff -a \geq -t, \quad t \leq a \iff -t \geq -a.$$

Prima identità. Si supponga anzitutto che A sia superiormente limitato e si ponga $s = \sup A \in \mathbb{R}$. Per la [definizione 4.8](#), $a \leq s$ per ogni $a \in A$. Moltiplicando per -1 ,

$$-s \leq -a \quad \forall a \in A.$$

Quindi $-s$ è un minorante di $-A$, che risulta inferiormente limitato.

Se $\ell \in \mathbb{R}$ è un qualsiasi minorante di $-A$, si ha $\ell \leq -a$ per ogni $a \in A$. Invertendo nuovamente il verso,

$$a \leq -\ell \quad \forall a \in A.$$

Il numero $-\ell$ è dunque un maggiorante di A . Poiché s è il minimo dei maggioranti, si ha $s \leq -\ell$, da cui $\ell \leq -s$. Pertanto $-s$ è il massimo dei minoranti di $-A$. Per la [definizione 4.7](#),

$$\inf(-A) = -s = -\sup A.$$

Se A non è superiormente limitato, per ogni $t \in \mathbb{R}$ esiste $a \in A$ tale che $a > -t$; altrimenti $-t$ sarebbe un maggiorante di A . Moltiplicando per -1 , si ottiene

$$-a < t.$$

Per ogni $t \in \mathbb{R}$ esiste quindi un elemento di $-A$ strettamente minore di t . L'insieme $-A$ non è dunque inferiormente limitato. Poiché $\sup A = +\infty$, si conclude

$$\inf(-A) = -\infty = -\sup A.$$

Seconda identità. Si supponga anzitutto che A sia inferiormente limitato e si ponga $i = \inf A \in \mathbb{R}$. Per la [definizione 4.7](#), $i \leq a$ per ogni $a \in A$. Moltiplicando per -1 ,

$$-a \leq -i \quad \forall a \in A.$$

Quindi $-i$ è un maggiorante di $-A$, che risulta superiormente limitato.

Se $u \in \mathbb{R}$ è un qualsiasi maggiorante di $-A$, si ha $-a \leq u$ per ogni $a \in A$. Invertendo nuovamente il verso,

$$-u \leq a \quad \forall a \in A.$$

Il numero $-u$ è dunque un minorante di A . Poiché i è il massimo dei minoranti, si ha $-u \leq i$, da cui $-i \leq u$. Pertanto $-i$ è il minimo dei maggioranti di $-A$. Per la [definizione 4.8](#),

$$\sup(-A) = -i = -\inf A.$$

Se A non è inferiormente limitato, per ogni $t \in \mathbb{R}$ esiste $a \in A$ tale che $a < -t$; altrimenti $-t$ sarebbe un minorante di A . Moltiplicando per -1 , si ottiene

$$-a > t.$$

Per ogni $t \in \mathbb{R}$ esiste quindi un elemento di $-A$ strettamente maggiore di t . L'insieme $-A$ non è dunque superiormente limitato. Poiché $\inf A = -\infty$, si conclude

$$\sup(-A) = +\infty = -\inf A.$$

□

A Tutorato 1: fattoriale e dimostrazioni per induzione

Esercizio A.1 (Semplificazione di un rapporto di fattoriali). Per $n \in \mathbb{N}$, semplificare l'espressione

$$\frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!}.$$

Soluzione dell'esercizio. Per la [definizione 2.4](#),

$$(n+2)! = (n+2)(n+1)!, \quad (n+3)! = (n+3)(n+2)(n+1)!.$$

Raccogliendo $(n+1)!$ al numeratore, si ottiene

$$\begin{aligned} \frac{(n+2)! + (n+1)!}{(n+3)!} &= \frac{((n+2)+1)(n+1)!}{(n+3)(n+2)(n+1)!} \\ &= \frac{(n+3)(n+1)!}{(n+3)(n+2)(n+1)!} \\ &= \frac{1}{n+2}. \end{aligned}$$

Il denominatore iniziale e i fattori semplificati sono strettamente positivi per ogni $n \in \mathbb{N}$; tutte le divisioni sono quindi lecite, anche nel caso $n = 0$. □

Esercizio A.2 (Somma dei primi n numeri dispari positivi). Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$, vale

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2.$$

Soluzione dell'esercizio. Si applica il [teorema 1.1](#) con valore iniziale $p = 1$.

Passo base. Per $n = 1$,

$$\sum_{k=1}^1 (2k-1) = 1 = 1^2.$$

Passo induttivo. Sia $n \geq 1$ e si supponga che valga l'ipotesi induttiva

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2.$$

Separando l'ultimo addendo della somma fino a $n+1$ e applicando l'ipotesi induttiva, si ottiene

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1) &= \sum_{k=1}^n (2k-1) + (2(n+1)-1) \\ &= n^2 + 2n + 1 \\ &= (n+1)^2. \end{aligned}$$

È dunque verificata la formula per $n+1$. Per il principio di induzione, l'identità vale per ogni $n \geq 1$. □

Esercizio A.3 (Somma dei quadrati dei primi n naturali positivi). Dimostrare che, per ogni $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$, vale

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Soluzione dell'esercizio. Si applica il [teorema 1.1](#) con valore iniziale $p = 1$.

Passo base. Per $n = 1$,

$$\sum_{k=1}^1 k^2 = 1 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6}.$$

Passo induttivo. Sia $n \geq 1$ e si supponga

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Separando l'ultimo addendo e applicando l'ipotesi induttiva,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} k^2 &= \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= \frac{n+1}{6} (n(2n+1) + 6(n+1)) \\ &= \frac{n+1}{6} (2n^2 + 7n + 6) \\ &= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}. \end{aligned}$$

Nell'ultimo passaggio è stata utilizzata la fattorizzazione $2n^2 + 7n + 6 = (n+2)(2n+3)$. Poiché $2n+3 = 2(n+1)+1$, l'espressione ottenuta coincide con quella richiesta per $n+1$. Il passo induttivo è quindi verificato, e la formula vale per ogni $n \geq 1$. $\square$

Esercizio A.4 (Dimostrazione del binomio di Newton). Dimostrare per induzione il [teorema 5.2](#): per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Soluzione dell'esercizio. Fissati $a, b \in \mathbb{R}$, si applica il [teorema 1.1](#) con valore iniziale $p = 0$. Si mantiene la convenzione $t^0 = 1$, anche per $t = 0$, adottata nel [teorema 5.2](#).

Passo base. Per la [definizione 3.1](#), $\binom{0}{0} = 1$. Quindi, per $n = 0$,

$$(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0.$$

Passo induttivo. Sia $n \in \mathbb{N}$ e si supponga che valga l'ipotesi induttiva

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Moltiplicando per $a + b$ e distribuendo il prodotto rispetto alla somma finita, si ottiene

$$\begin{aligned}(a + b)^{n+1} &= (a + b)^n(a + b) \\ &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \right) (a + b) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}.\end{aligned}$$

Nella prima somma si pone $j = k + 1$. Quando k varia da 0 a n , il nuovo indice j varia da 1 a $n + 1$; inoltre $k = j - 1$ e $n - k = n + 1 - j$. Pertanto

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} = \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n+1-j}.$$

Rinominando j come k , l'uguaglianza precedente dà

$$(a + b)^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n+1-k}.$$

Le due somme hanno ora gli stessi fattori $a^k b^{n+1-k}$, ma intervalli di sommazione diversi: gli indici comuni sono $1, \dots, n$. Il termine con $k = n + 1$ compare soltanto nella prima somma e vale a^{n+1} , mentre quello con $k = 0$ compare soltanto nella seconda e vale b^{n+1} , poiché $\binom{n}{n} = \binom{n}{0} = 1$. Separando questi termini e combinando le somme sugli indici comuni, si ottiene

$$(a + b)^{n+1} = b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} + a^{n+1}.$$

Per $n = 0$ non vi sono indici comuni: la somma da 1 a 0 è vuota e vale 0, e l'uguaglianza resta valida.

Per ogni $1 \leq k \leq n$, l'identità di Pascal, dimostrata nella [proposizione 3.2](#), si applica con indice superiore $n + 1$ e fornisce

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}.$$

Infatti, $n + 1 \geq 1$ e $1 \leq k \leq n + 1$, come richiesto dalle ipotesi dell'identità. Per la [definizione 3.1](#), anche i termini estremi hanno coefficienti $\binom{n+1}{0} = \binom{n+1}{n+1} = 1$. Ne segue

$$\begin{aligned}(a + b)^{n+1} &= b^{n+1} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + a^{n+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}.\end{aligned}$$

È quindi verificata la formula per $n + 1$. Il principio di induzione assicura che essa vale per ogni $n \in \mathbb{N}$. Poiché $a, b \in \mathbb{R}$ erano arbitrari, segue il [teorema 5.2](#). $\square$